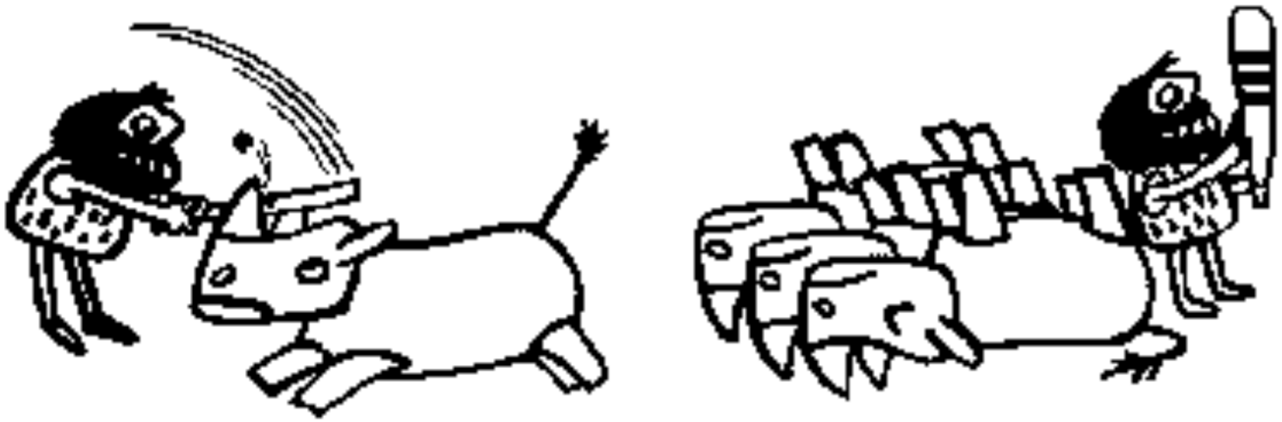
CAPÍTULO 3



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS

OBJETIVO

El objetivo de este capítulo es introducir al estudiante a los métodos básicos para la resolución de ecuaciones implícitas. Al final del capítulo el estudiante será capaz de diferenciar entre los métodos de dos puntos iniciales y los métodos de un solo punto inicial y seleccionar cual es el más adecuado a su problema. El estudiante será igualmente capaz de diagnosticar la calidad de la solución obtenida. Sus nociones podrán ser generalizadas a problemas multivariables. El estudiante sabrá igualmente como resolver el caso especial de los polinomios.

ECUACIÓN IMPLÍCITA

- Una ecuación implícita es una ecuación en la cual la(s) variable(s) no puede(n) ser obtenida(s) en forma explícita.
- Se suele decir que no se puede(n) "despejar" la(s) incógnita(s).
- No sólo es una ecuación no lineal ya que:

$ax^3+byx^2+cx+d=0$ no es implícita en y.

ECUACIÓN IMPLÍCITA

- Su escritura genérica es de la forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

EJEMPLOS

- Ecuación de estado (por ejemplo la ecuación de van der Waals):

$$\left(P+\frac{a}{v^2}\right)(v\text{-}b)=RT$$

- Reactor de mezcla completa con reacción química y volumen variable:

$$C_a=\frac{C_{ao}v_o}{(V_o^*+v_o t)k}(1-e^{-kt})$$

TIPOS DE MÉTODOS
Una variable

- Dos puntos iniciales: basados en el Teorema de Bolzano (Bisección, Regula-Falsi, etc.)
- Un punto inicial: Newton-Raphson, Punto Fijo, Métodos de Segundo Orden

TIPOS DE MÉTODOS
Multivariables

- Método de Newton-Raphson Multivariable.
- Método de Punto Fijo Multivariable

RAÍCES DE POLINOMIOS

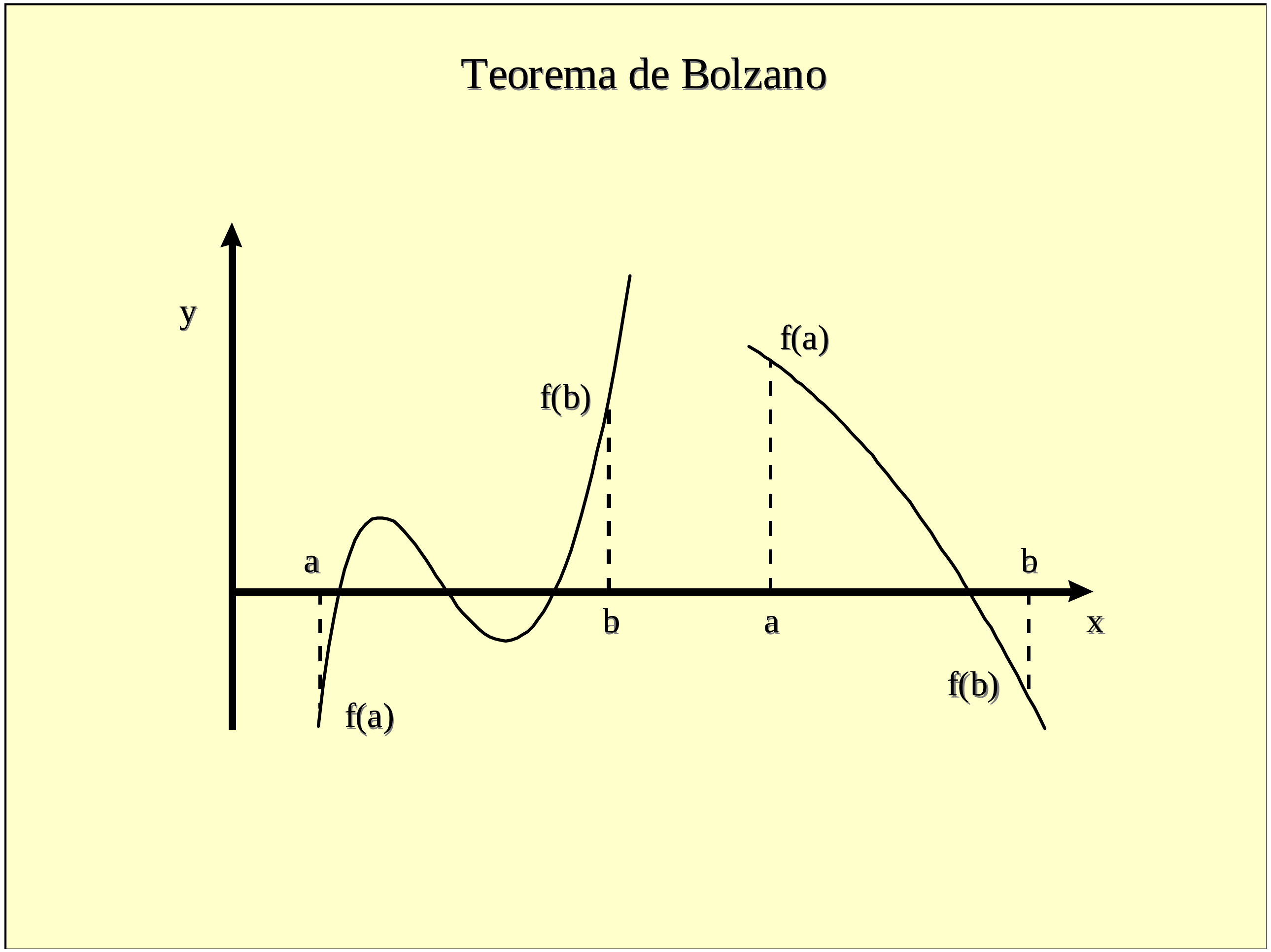
- Polinomios: se estudiarán como un caso particular.
- Se revisarán las técnicas para hallar raíces de polinomios de segundo y tercer grado (Cardano), Método de Bairstow y cociente diferencia (Rufini).

MÉTODOS CON DOS PUNTOS INICIALES

Teorema de Bolzano

Sea f una función contínua en cada punto del intervalo cerrado [a,b], y se supondrá que f(a) y f(b) tienen signos distintos. Existe entonces por lo menos un c en el intervalo abierto]a,b[tal que f(c) sea igual a cero.

TEOREMA DE BOLZANO



TEOREMA DE BOLZANO

Lógica para encerrar la raíz

Si $f(a).f(c) = 0$	c es la solución
Si $f(a).f(c) > 0$	a toma el valor de c
Si $f(a).f(c) < 0$	b toma el valor de c

MÉTODO DE LA BISECCIÓN

- Este método es el más sencillo de todos.
- Se basa en un sentido natural del hombre que podría transcribirse así: como el punto c está entre a y b, se podría decir que el punto c está en el medio de a y b.

MÉTODO DE LA BISECCIÓN

- Es evidente que el punto más sencillo de ubicar dentro del intervalo a-b es exactamente en el punto medio.

$$c = \frac{a + b}{2}$$

DESVENTAJAS

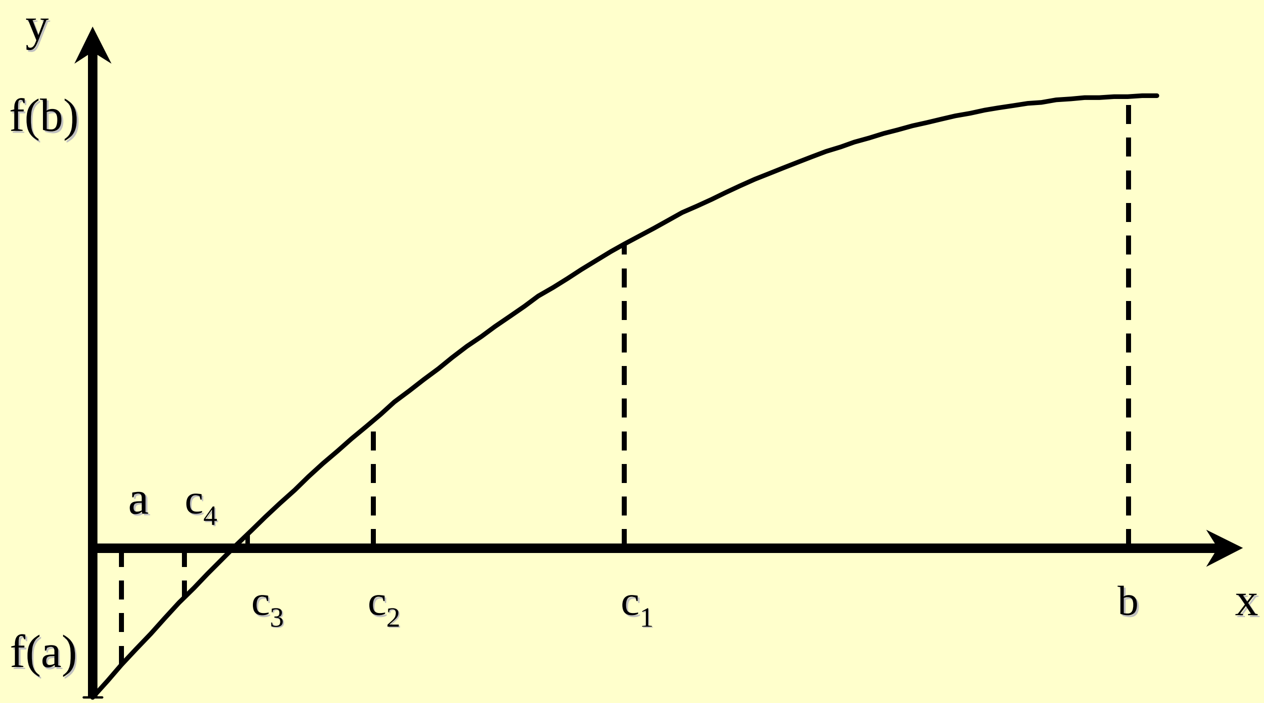
- Si bien la puesta en funcionamiento del método es muy fácil de llevar a cabo, el número de cálculos que se debe realizar para alcanzar la precisión deseada suele ser muy elevado.
- El número de iteraciones puede ser *a priori* evaluada.

DESVENTAJAS

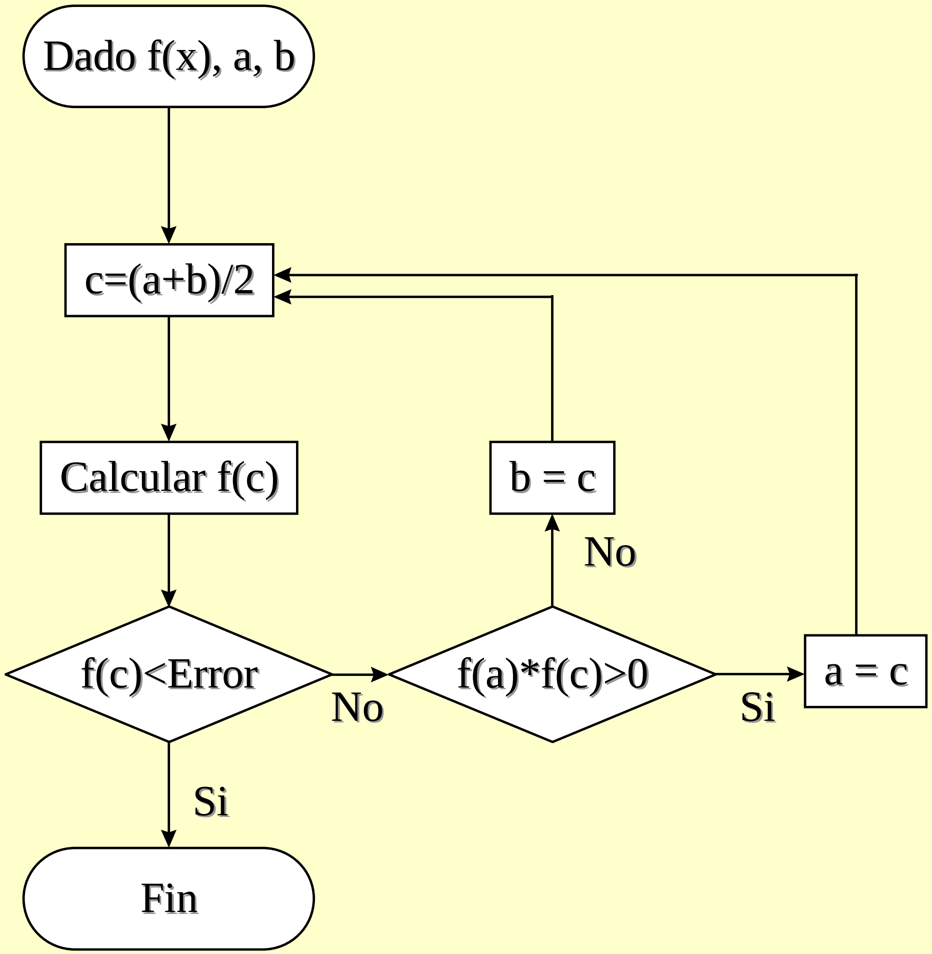
- En cada iteración el valor aproximado de la solución cambia solamente en la cantidad $\varepsilon^{(n)}$, donde n representa el número de iteraciones que se han realizado hasta este paso de cálculo:

$$\varepsilon^{(n)} = \frac{b-a}{2^n}$$

Método de la bisección



Método de la bisección



REGULA-FALSI

(Interpolación Lineal)

- El método de Regula-Falsi corresponde a realizar una interpolación lineal entre los puntos a y b.
- Se busca, en la recta que pasa por los puntos [a;f(a)] y [b;f(b)], el punto c tal que su imagen f(c) se anule.

REGULA-FALSI

- En esta expresión aparece la relación (b - a)/(f(b) - f(a)) que es equivalente al inverso de la derivada de primer orden de la función f.
- La ecuación resultante es:

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

VENTAJAS

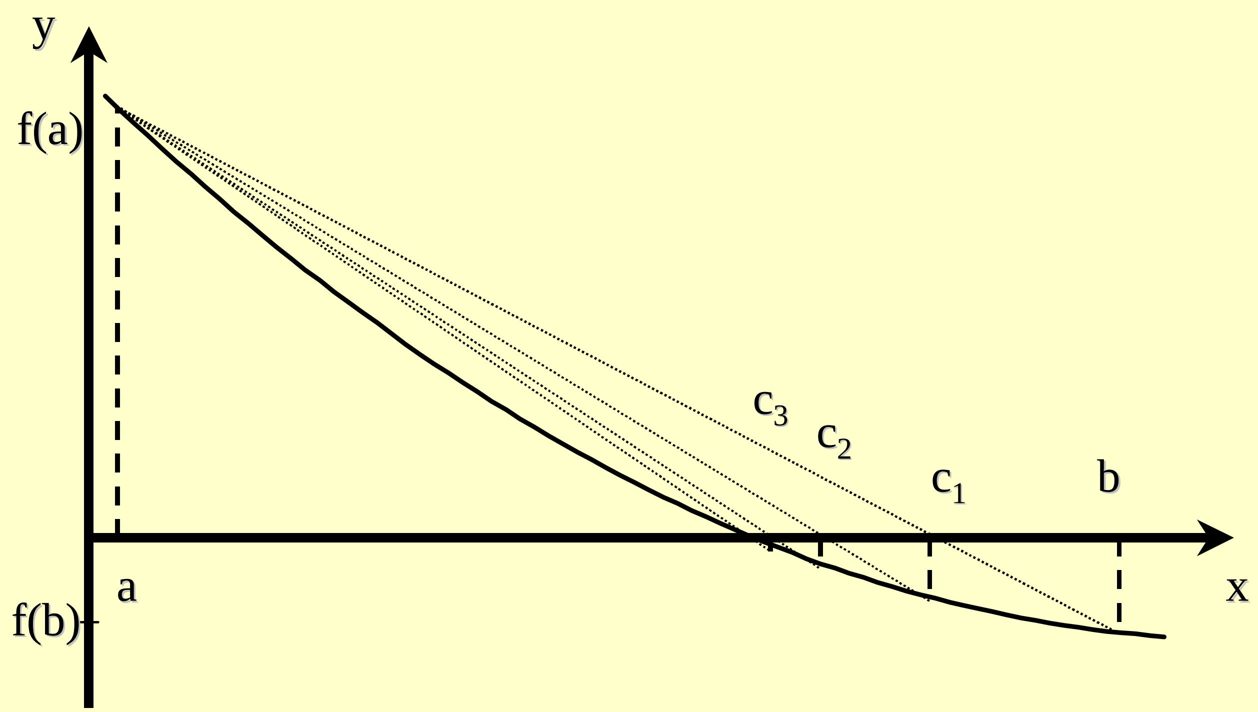
- La velocidad de convergencia de este método es muy superior a la del método de la bisección cuando ambos puntos están lejos de la solución.
- Se puede demostrar que la convergencia del método de interpolación lineal puede ser escrito de la forma:

$$\varepsilon^{(n)} = \varepsilon^{(n-1)}\varepsilon^{(n-2)} \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$$

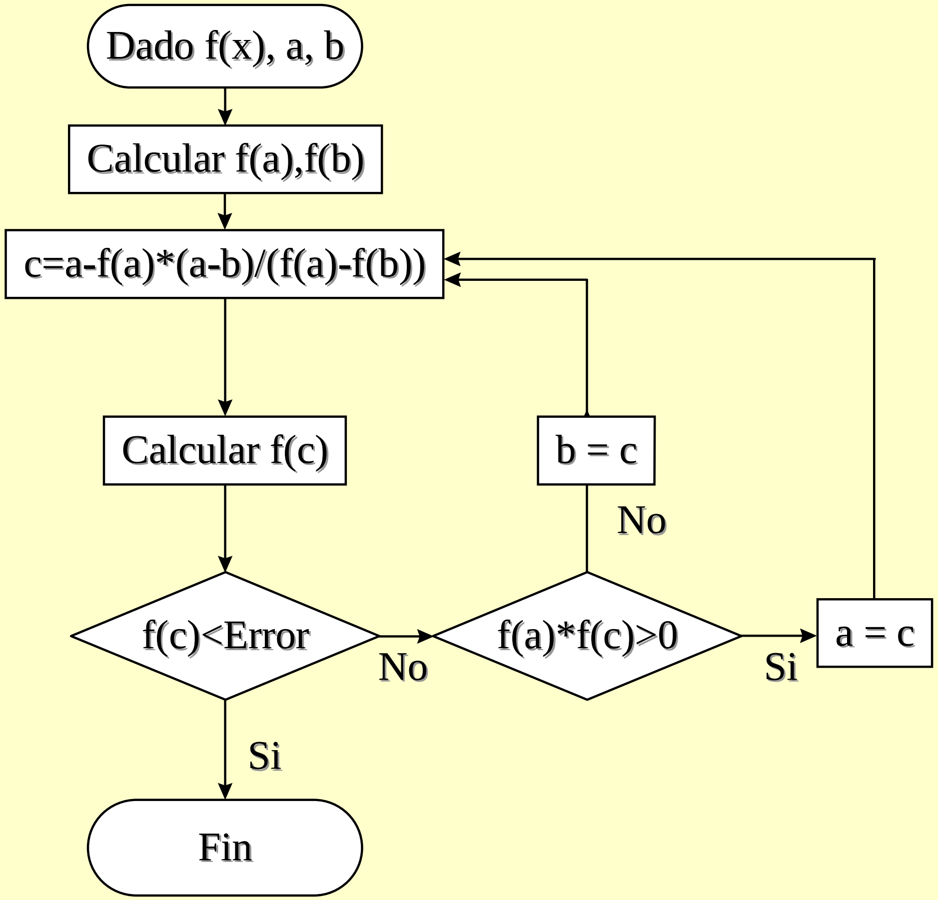
DESVENTAJAS

- Su eficiencia ya no es tan evidente cuando un punto está distante de la solución y el otro está muy cercano a ella.
- Uno de los principales defectos de este método es que en la mayoría de los casos, uno de los límites del intervalo es utilizado como punto de apoyo y solamente el otro se ve afectado por el procedimiento de cálculo, afectando así la velocidad de convergencia.

Método regula falsi



Método regula falsi ó de la secante



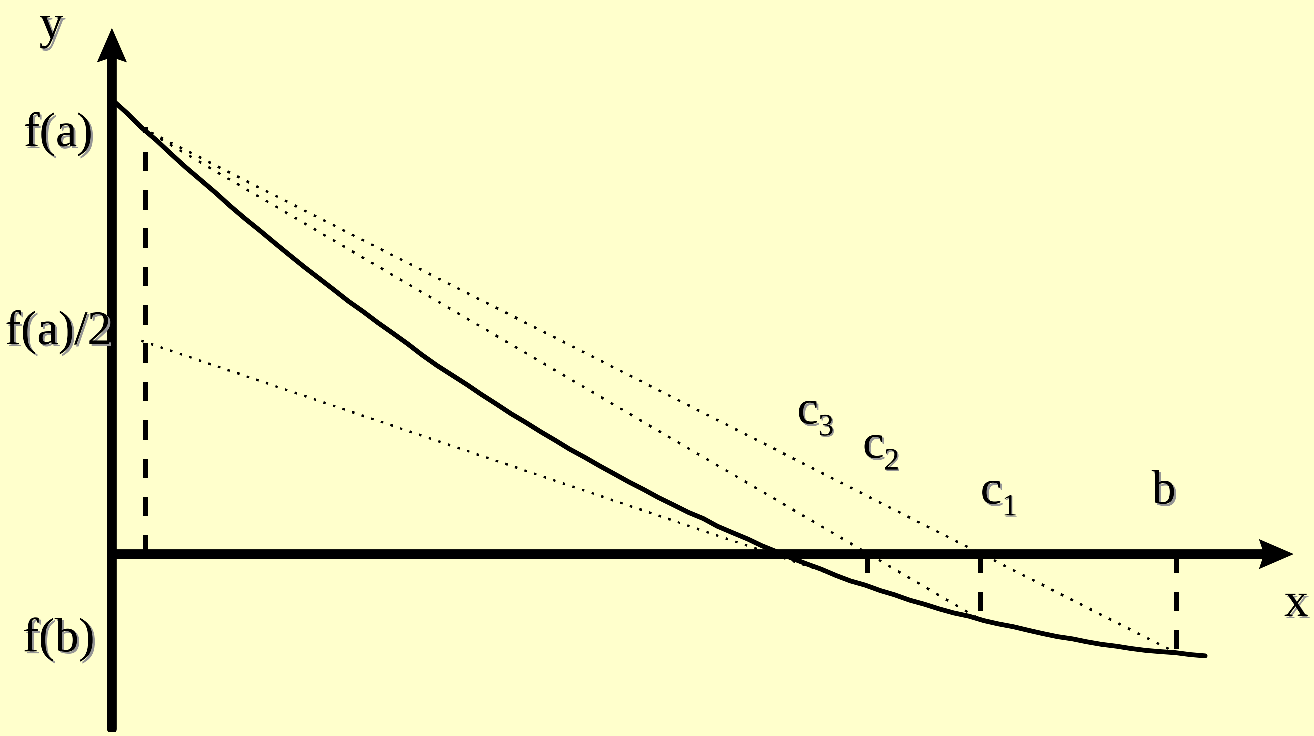
REGULA-FALSI MODIFICADO

- Diseñado para evitar que durante el proceso de acercamiento a la raíz, no se vaya a utilizar un punto lejano a ella como apoyo fijo.
- Esto se logra mediante unas preguntas realizadas sobre los límites del intervalo.

REGULA-FALSI MODIFICADO

- Si durante dos iteraciones sucesivas el producto f(a).f(c) mantiene su signo negativo entonces los nuevos límites son [a; f(a)/2] y [c; f(c)].
- Si el producto f(a).f(c) mantiene su signo positivo entonces los nuevos límites son [c; f(c)] y [b; f(b)/2]
- Finalmente si el f(a).f(c) cambia de signo se aplica la regla tradicional de Regula-Falsi.

Método regula falsi modificado



REGULA-FALSI MODIFICADO

- El valor de c se obtiene por una expresión muy similar a la de la secante, pero con un factor correctivo a nivel del denominador (que representa la derivada de primer orden).

$$c = a - \frac{f(a)}{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} + \dfrac{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} - \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}}{2}}$$

MÉTODOS CON UN PUNTO INICIAL

- Los métodos con un solo punto inicial suelen ser más rápidos para llegar a la solución aproximada que los métodos con dos puntos iniciales.
- Además, ya que requieren un solo punto de partida, no necesitan un conocimiento *a priori* de la función para estimar la zona donde puede(n) estar la(s) solución(es).

DESVENTAJAS

- Su principal defecto se debe al hecho que este mismo desconocimiento de la función no permite saber *a priori* si existe o no una solución al problema, o en el caso que exista, si puede ser alcanzada a partir del primer valor suministrado.

MÉTODOS TRADICIONALES

- Newton-Raphson y
- Punto Fijo.

NEWTON-RAPHSON

- El método de Newton-Raphson, a veces conocido solamente bajo el nombre de Newton, se basa en formular un desarrollo en serie de Taylor en un punto cercano a la solución.
- Este desarrollo en serie puede ser escrito:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots.$$

NEWTON-RAPHSON

- Si ahora se aplica esta fórmula, truncada al primer orden, a dos puntos consecutivos de la serie que converge hacia la solución tal que h= $x^{(n+1)}$- $x^{(n)}$, y notando que $f(x^{(n+1)})$ tiende a cero, se obtiene:

$$0 = f(x^{(n+1)}) = f(x^{(n)}) + (x^{(n+1)} - x^{(n)})f'(x^{(n)})$$

NEWTON-RAPHSON

- Reorganizando esta ecuación se obtiene:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

RF

VENTAJAS

- La ecuación de Newton-Raphson es muy sencilla, pero sumamente poderosa.
- Se requieren pocas iteraciones para converger, pero no se tiene *a priori* ninguna garantía de que el método vaya a permitir obtener la solución.

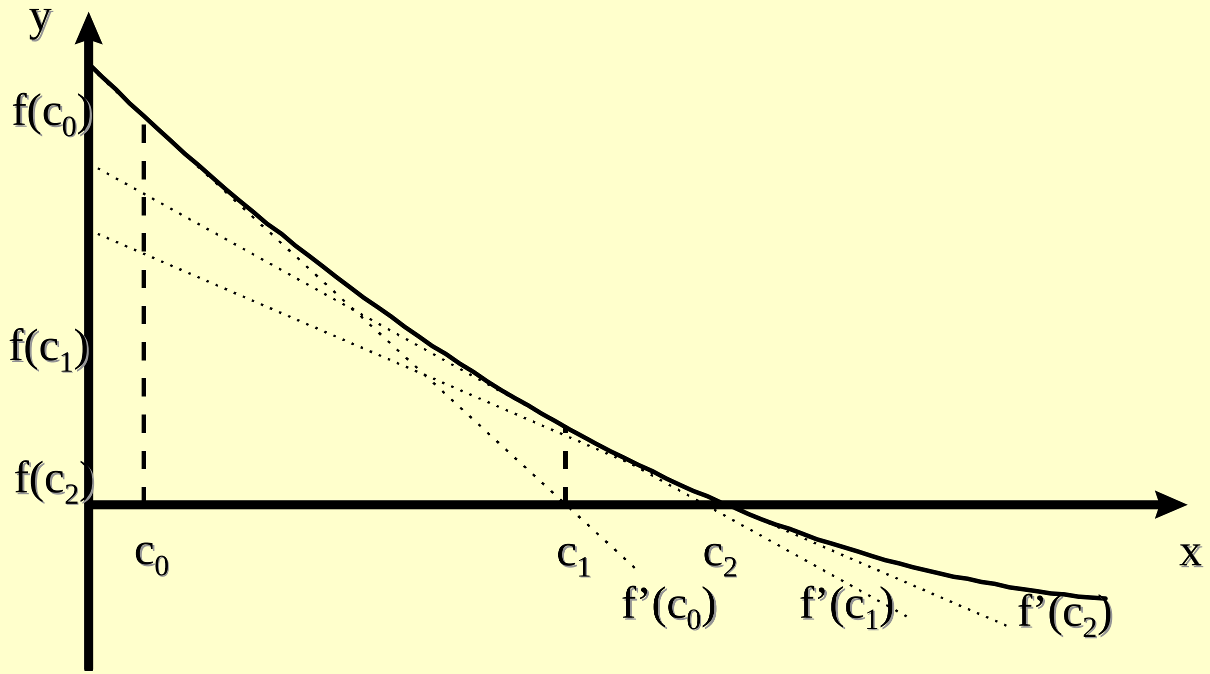
DESVENTAJAS

- En cada iteración, se necesita evaluar una vez la función f(x) y una vez su derivada f'(x).
- Su principal limitación corresponde al hecho que debe conocerse la expresión analítica de la derivada, o realizar una evaluación precisa en forma numérica.

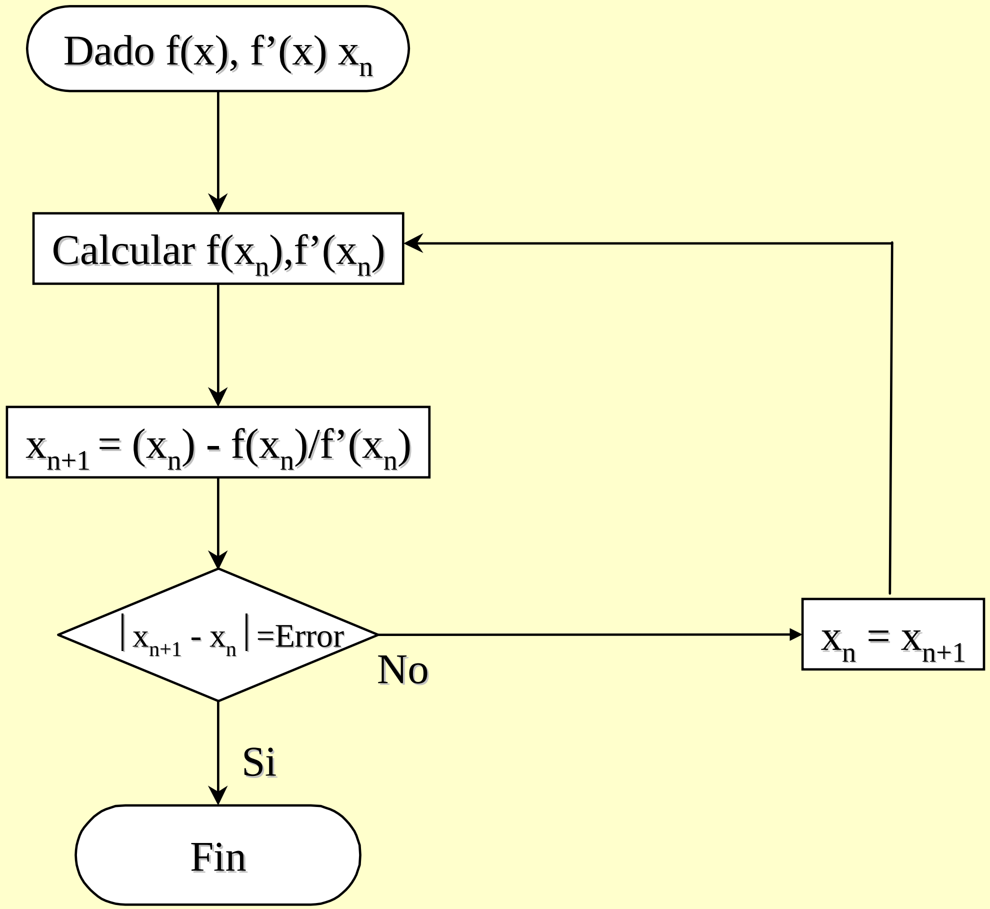
N-R y Regula-Falsi

- Si se reemplaza el cálculo de la derivada por una aproximación a través de dos puntos consecutivos
- $f'(x^{(n)}) = (f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)}))/(x^{(n)} - x^{(n-1)})$
- se obtiene el método de Regula-Falsi discutido anteriormente.

Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson



CRITERIO DE CONVERGENCIA

$$\left|\frac{\varepsilon^{(n)}}{\left(\varepsilon^{(n-1)}\right)^2}\right| = \left|\frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right| < 1$$

PUNTO FIJO

- En el caso del método del punto fijo, la escritura general del problema debe ser presentada de forma distinta.
- En efecto, en vez de tener la ecuación general f(x)=0, se debe escribir la ecuación de la forma g(x)=x.
- Ciertas formas pueden ser improcedentes para la obtención de la raíz de la ecuación.

PUNTO FIJO

- El procedimiento utilizado en el punto fijo es sumamente sencillo. A partir de un valor inicial de la variable x ($x^{(0)}$ al inicio del método y $x^{(n)}$ en la etapa n de cálculo), se calcula la imagen de la función g en este punto $g(x^{(0)})$ o $g(x^{(n)})$. Si el proceso es convergente, este valor corresponde a una mejor aproximación de la solución.

PUNTO FIJO

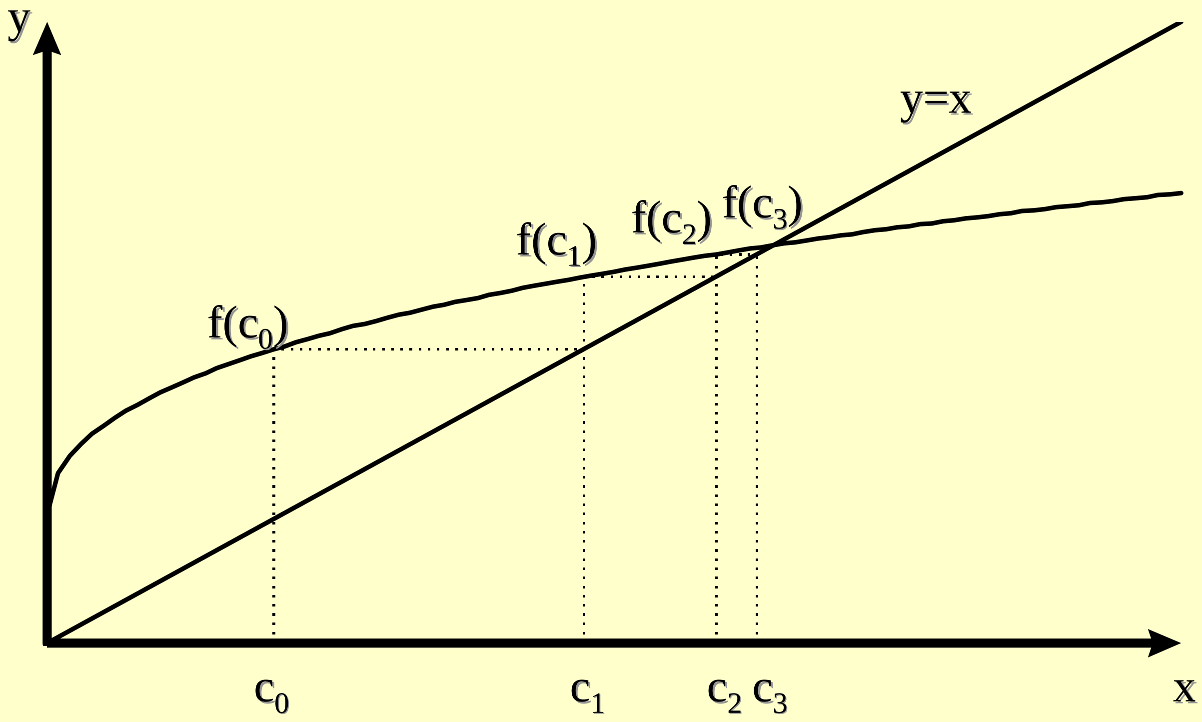
- La ecuación puede escribirse de la forma:

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$$

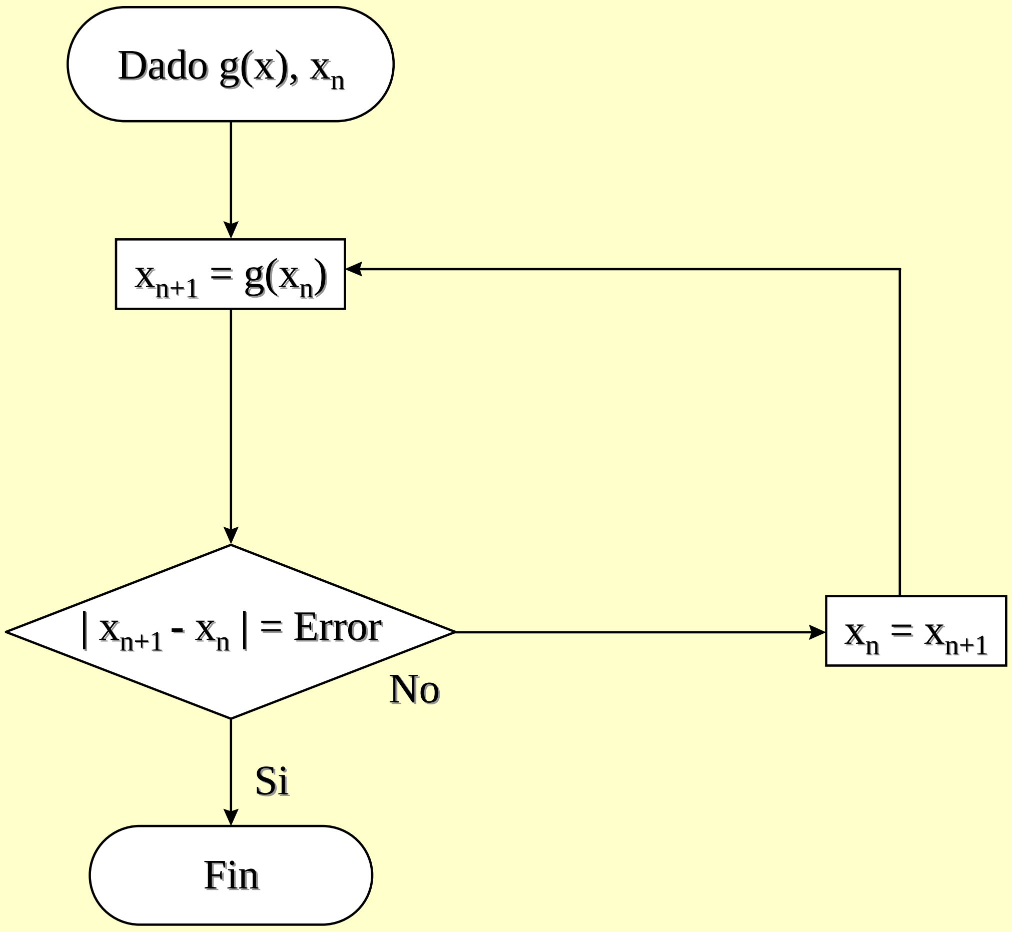
CRITERIO DE CONVERGENCIA

$$\left|\frac{\varepsilon^{(n+1)}}{\varepsilon^{(n)}}\right| = \left|f'(x^{(n)})\right| < 1$$

Método del punto fijo



Método del punto fijo



SUGERENCIAS

- Dado el hecho que, como se ha mencionado anteriormente, numerosas expresiones $g(x)=x$ pueden ser obtenidas a partir de $f(x)=0$, es conveniente tener un particular cuidado en seleccionar la función que sea la más representativa desde el punto de vista físico.

SUGERENCIAS
Relajación

- Es conveniente recordar que en numerosos casos, se puede probar la expresión:

$$x^{(n+1)} = (1-\alpha)x^{(n)} + \alpha g(x^{(n)})$$

- El valor de α es un número comprendido en el intervalo $]0,1]$, siendo $1/2$ un valor tradicional.

MÉTODOS DE SEGUNDO ORDEN

- Existen métodos que aceleran la convergencia del método de Newton-Raphson.
- Uno de los más sencillos es el método de Steffensen que toma en cuenta la derivada de segundo orden en el desarrollo en serie de Taylor.

MÉTODOS DE SEGUNDO ORDEN

- La expresión que se utiliza es:

$$0 = f(x^{(n+1)}) = f(x^{(n)}) + (x^{(n+1)} - x^{(n)})f'(x^{(n)}) + \frac{(x^{(n+1)} - x^{(n)})^2}{2} f''(x^{(n)})$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) + \frac{\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right)}{2} f''(x^{(n)})}$$

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

- Este tipo de fórmula permite obtener una mayor precisión en un solo cálculo.
- Requiere de la evaluación de un número superior de veces de la función y sus derivadas y por lo tanto requiere mayor tiempo de cálculo.

DESVENTAJAS

- Esta forma implícita requiere un cálculo iterativo del valor $x^{(n+1)}$, lo que es poco conveniente si se desea limitar el número de cálculos en cada paso.

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) + \frac{\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right)}{2} f''(x^{(n)})}$$

FÓRMULA DE HALLEY

- Se conoce también la fórmula de Halley para la evaluación de la solución a partir de del conocimiento de la derivada de segundo orden.
- La expresión es:

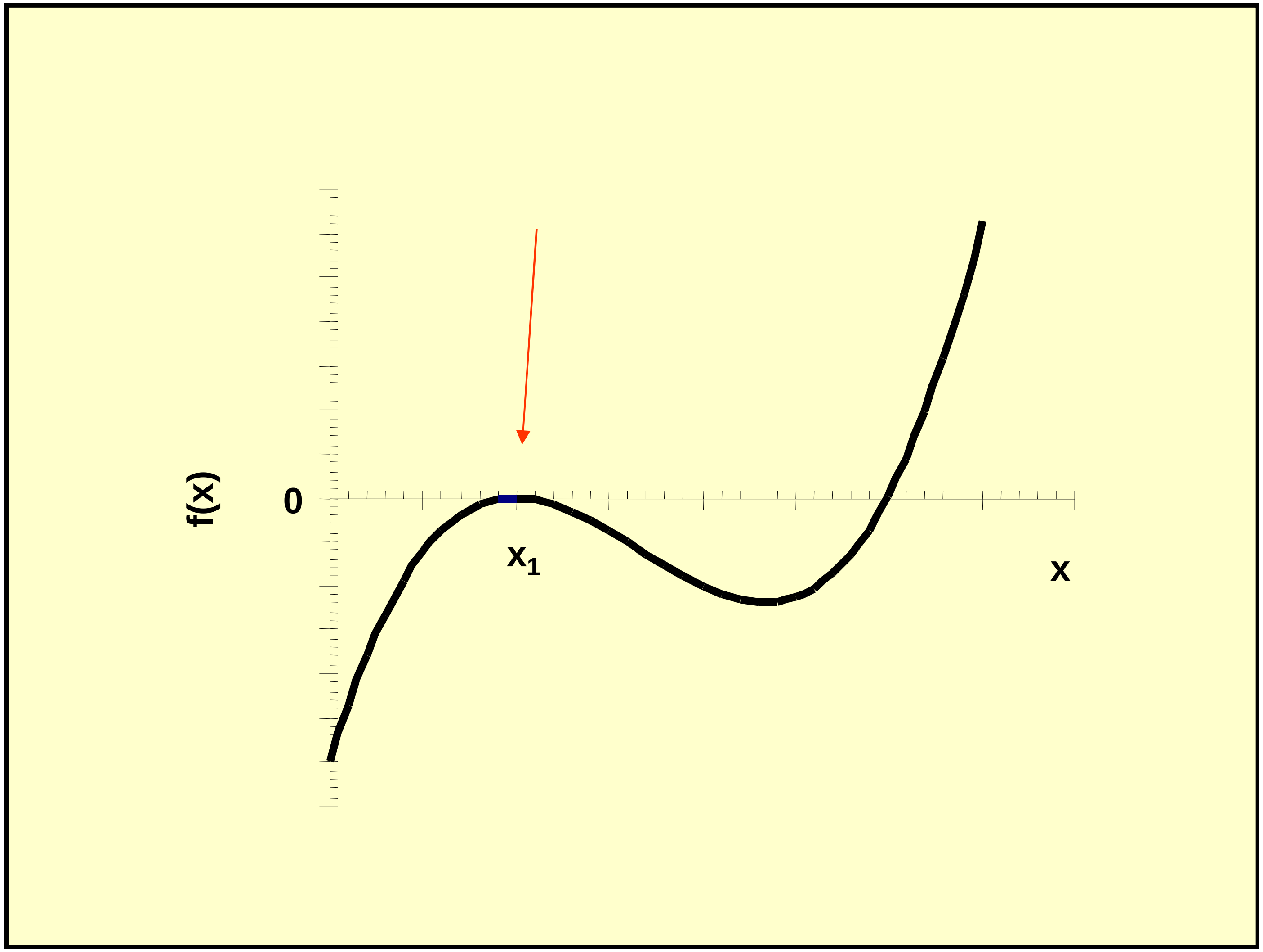
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) - \frac{f(x^{(n)})f''(x^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}}$$

RAÍCES MÚLTIPLES

- Una raíz de una función f(x) es múltiple cuando la función es tangencial al eje x.
- Por ejemplo, una raíz doble resulta de:

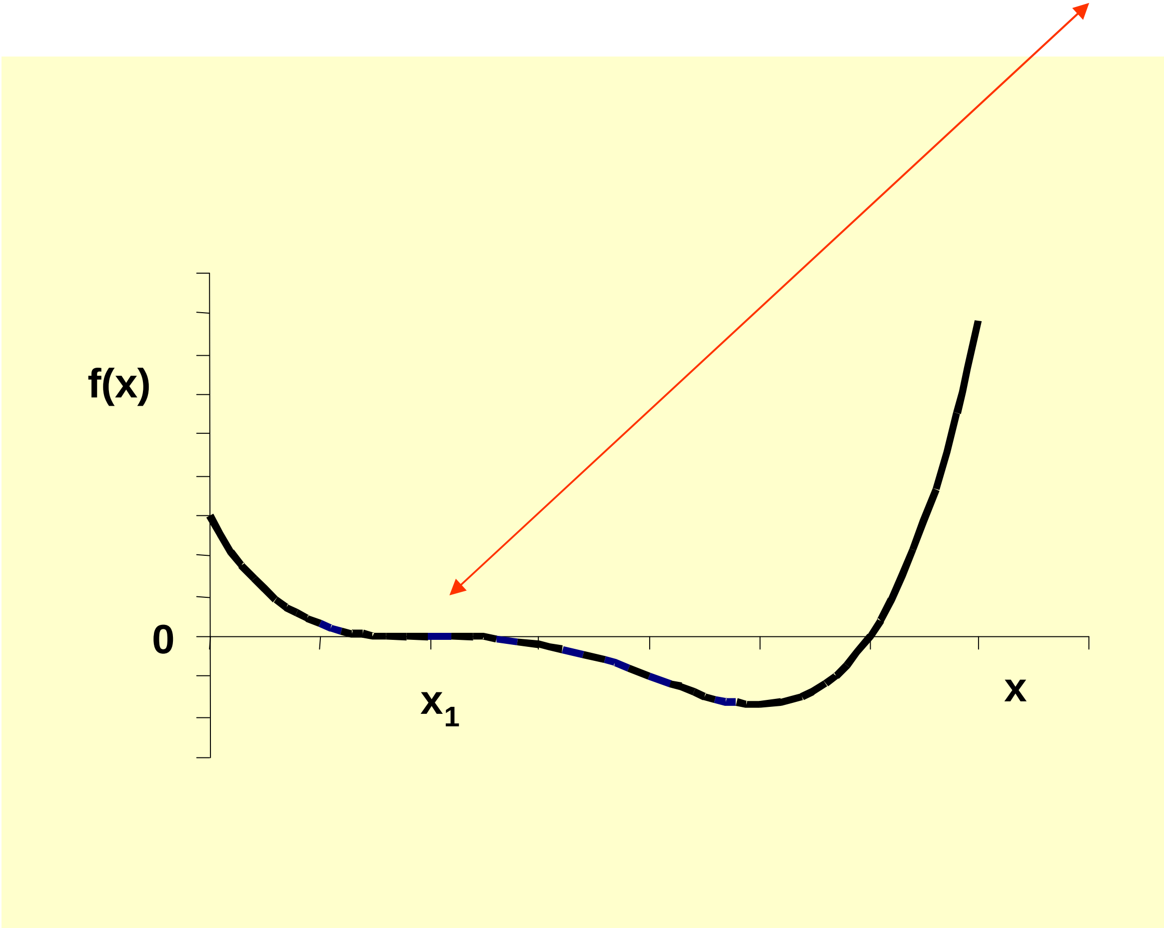
$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)^2 = x^3 - x^2\left(2x_1 + x_0\right) + x\left(x_1^2 + 2x_0x_1\right) - x_0x_1^2$$

RAICES DOBLES



RAÍCES TRIPLES

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)^3$$



PROBLEMAS

- Las funciones que presenten raíces múltiples pueden resultar muy problemáticas al querer hallar sus raíces por los métodos convencionales.
- Por ejemplo la raíces múltiples pares (doble, cuádruple, etc.) no presentan cambio de signos y su derivada es igual a cero.

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Propusieron la siguiente modificación a la fórmula de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- donde m es la multiplicidad de la raíz (esto es que m=2 para una raíz doble, m=3 para una raíz triple, etc.).

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Claro que no es muy satisfactorio tener que conocer la multiplicidad de una raíz previamente; por eso es que los mismos autores proponen una nueva función u(x) como la relación de una función con su derivada; es decir:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Demostraron que la función u(x) tiene las mismas raíces que la función original, por lo que proponen la siguiente fórmula para el cálculo iterativo:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{\left[f'(x_i)\right]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

AGENDA

- Lunes 7: Terminar Capítulo 3. Entregar Tarea # 2.

- Miércoles 9: Clase de ejercicios.

- Lunes 14: Primer Parcial. Entregar Tarea #3.

PARCIAL 1

- Día: 14 de febrero
- Duración: 2 horas
- Lugar: ENE-104
- Requiere: Calculadora. Hojas blancas tamaño carta.
- Tipo de examen: Libro abierto.

ESTRUCTURA DEL EXAMEN

- Dos partes: Teórica y práctica.
- Teórica: Selección sencilla. Tres preguntas incorrectas anulan una correcta. Entre 20 y 30 preguntas.
- Práctica: Tres problemas que pueden ser de: desarrollo, demostración, resolver un sistema sencillo o plantear un problema complejo.

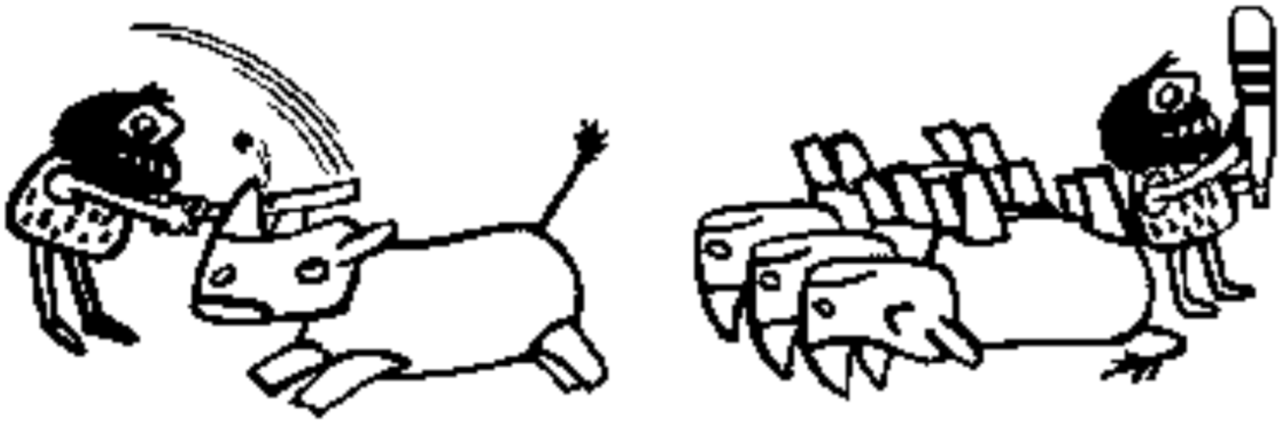
AGENDA

- Lunes 7: Terminar Capítulo 3. Entregar Tarea # 2.

- Miércoles 9: Clase de ejercicios.

- Lunes 14: Primer Parcial. Entregar Tarea #3.

CAPÍTULO 3



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS

(Segunda parte)

TIPOS DE MÉTODOS

Una variable

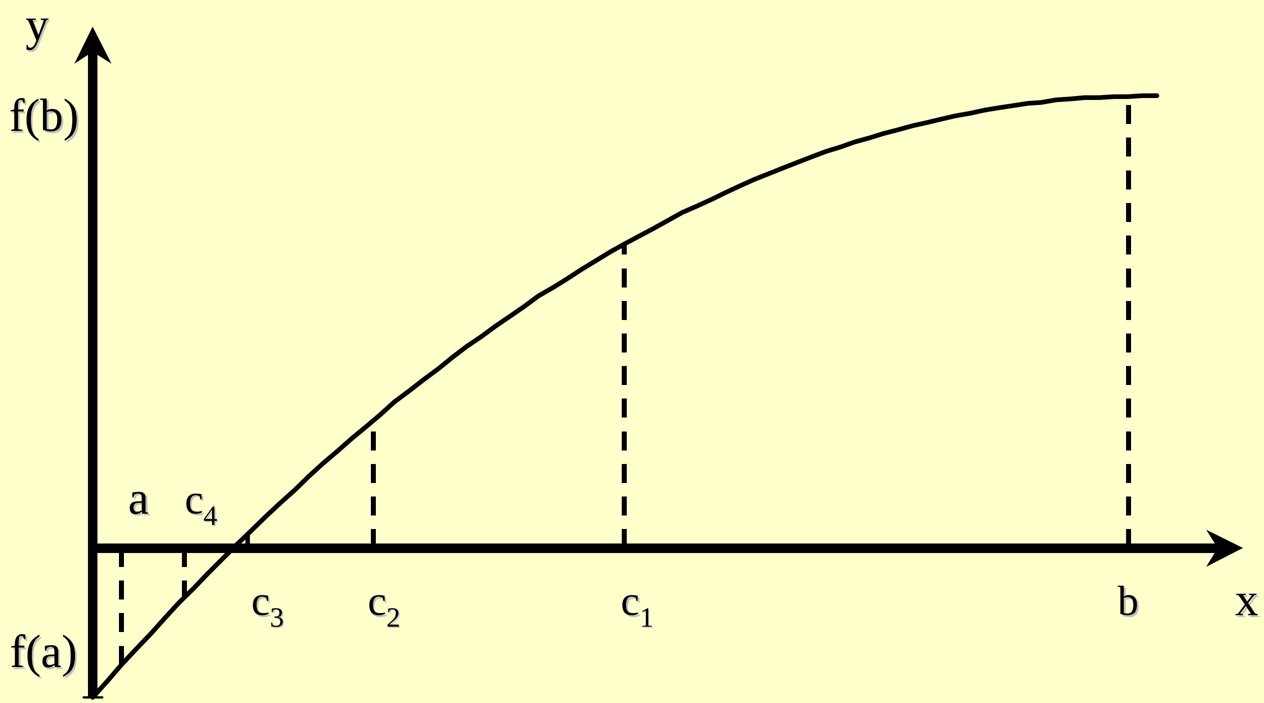
- Dos puntos iniciales: basados en el Teorema de Bolzano (Bisección, Regula-Falsi, etc.)

- Un punto inicial: Newton-Raphson, Punto Fijo, Métodos de Segundo Orden

TIPOS DE MÉTODOS
Multivariables

- Método de Newton-Raphson Multivariable.
- Método de Punto Fijo Multivariable

Método de la bisección



MÉTODO DE LA BISECCIÓN

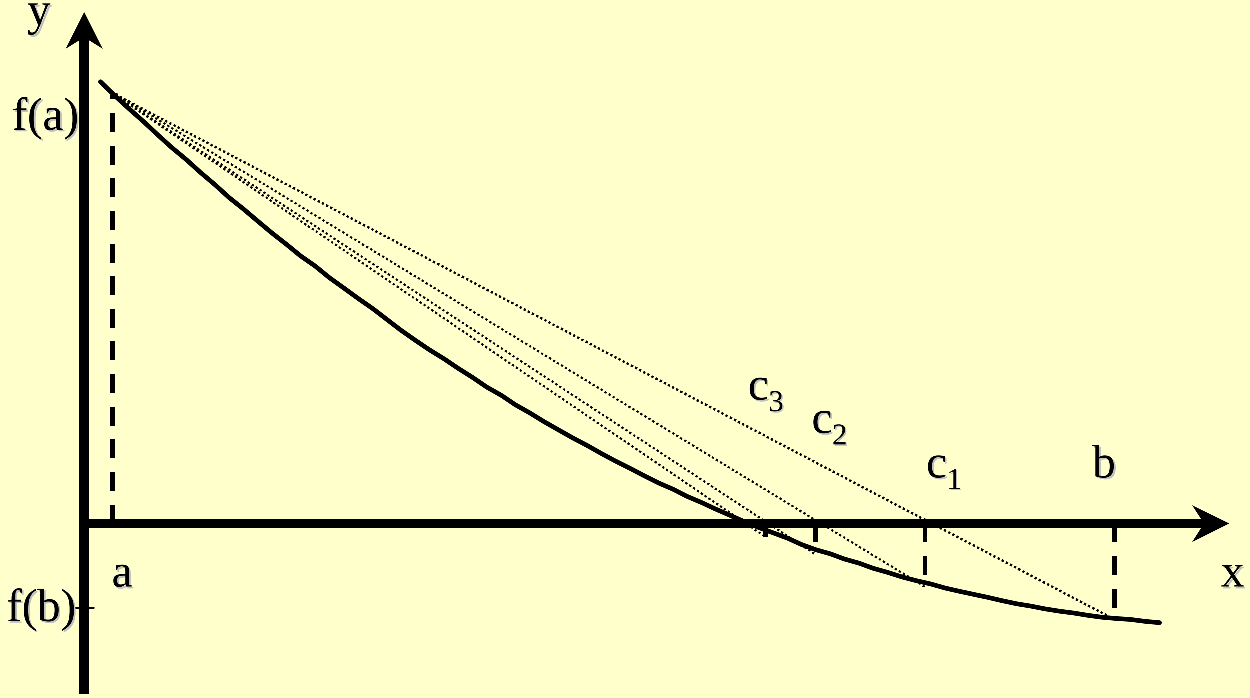
- El punto siguiente dentro del intervalo a-b es exactamente en el punto medio.

$$c = \frac{a+b}{2}$$

NÚMERO DE ITERACIONES

$$\varepsilon^{(n)} = \frac{b - a}{2^n}$$

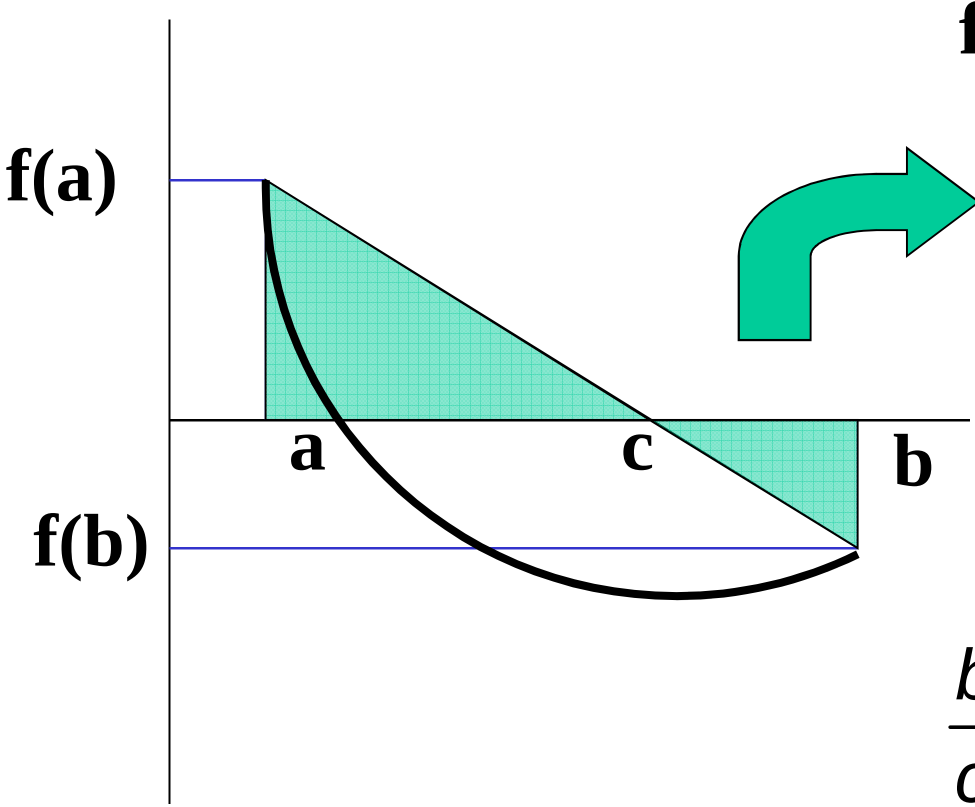
Método regula falsi

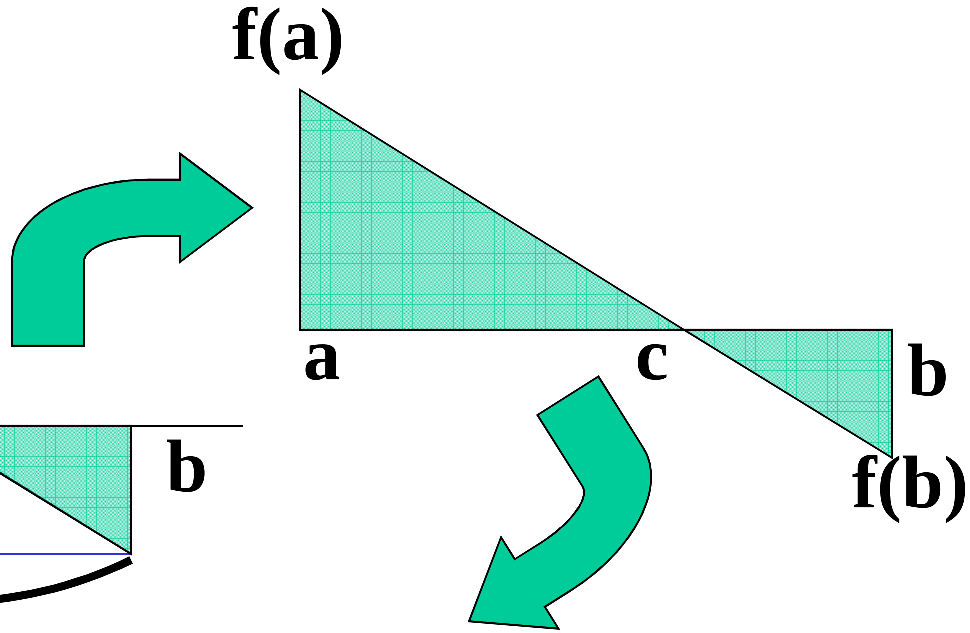


REGULA-FALSI

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Triángulos semejantes:



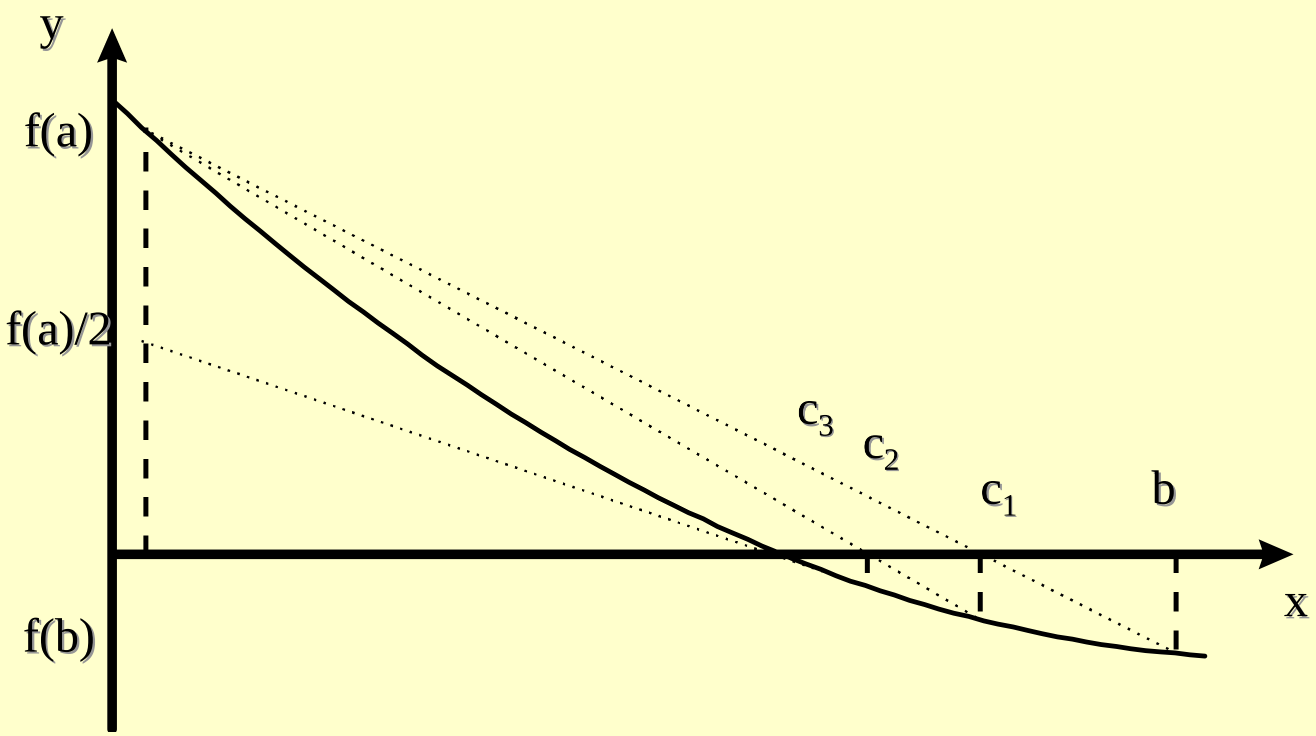


$$\frac{b-c}{c-a}=\frac{0-f(b)}{f(a)-0}$$

$$f(a)\left[b-c\right]=-\left(c-a\right)f(b)$$

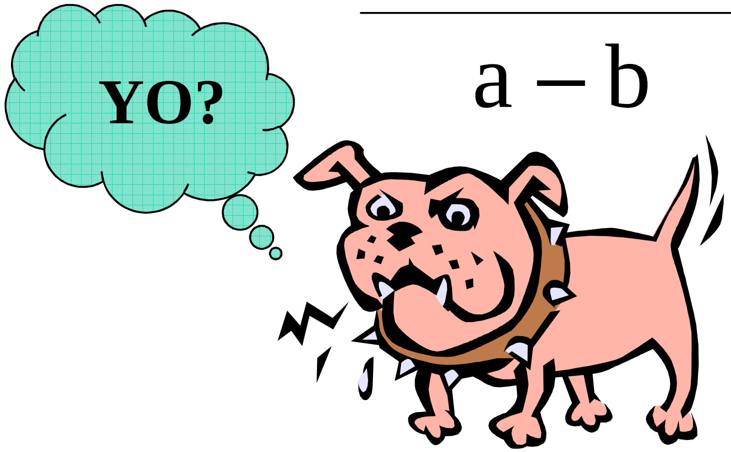
$$c=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Método regula falsi modificado

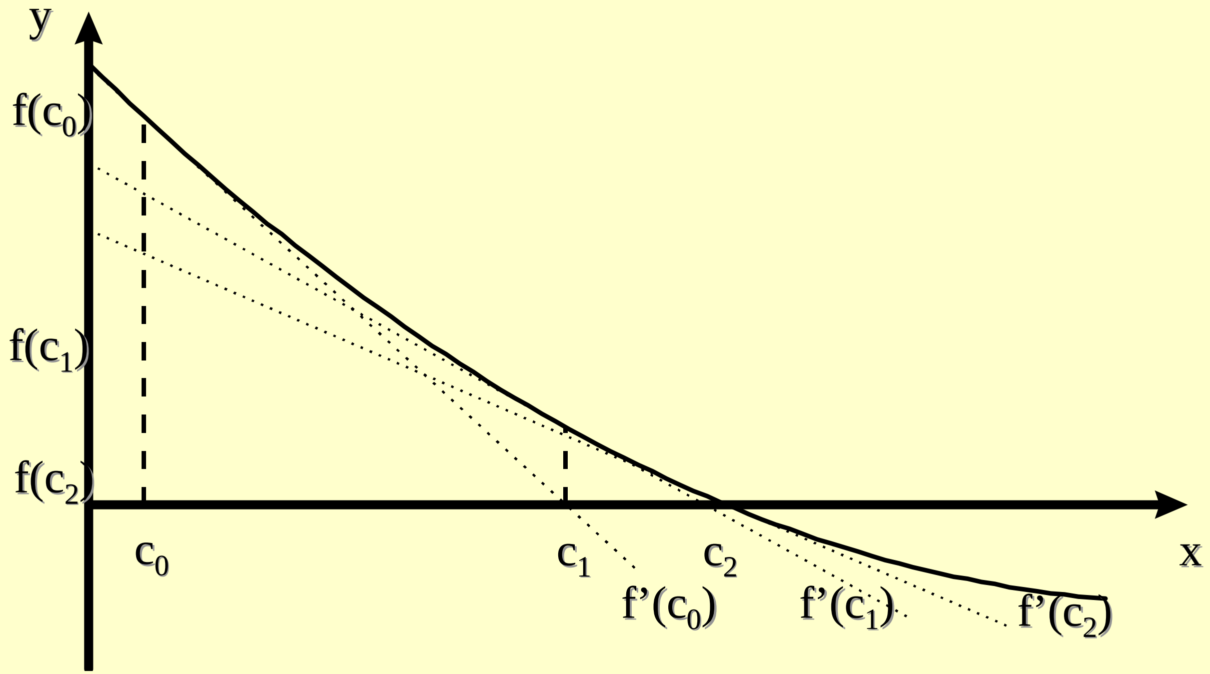


REGULA-FALSI MODIFICADO

$$c = a - \frac{f(a)}{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} + \dfrac{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} - \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}}{2}}$$

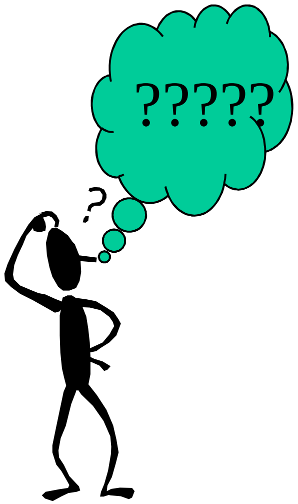


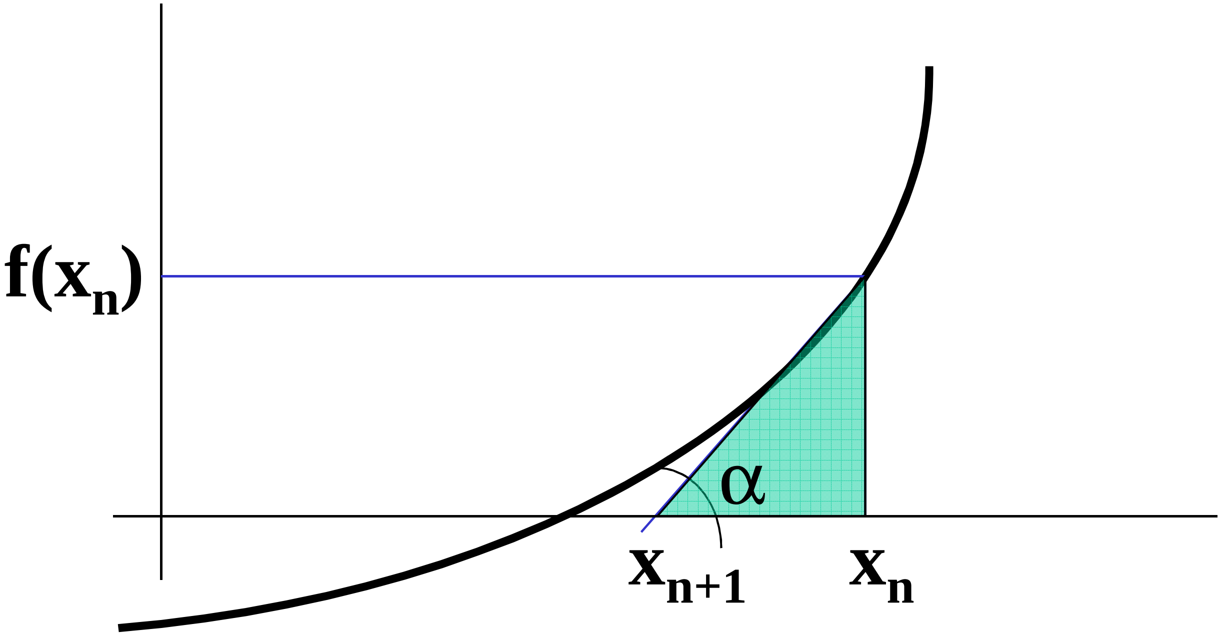
Método de Newton-Raphson



NEWTON-RAPHSON

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$





$$f'(x_n) = \tan\alpha = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

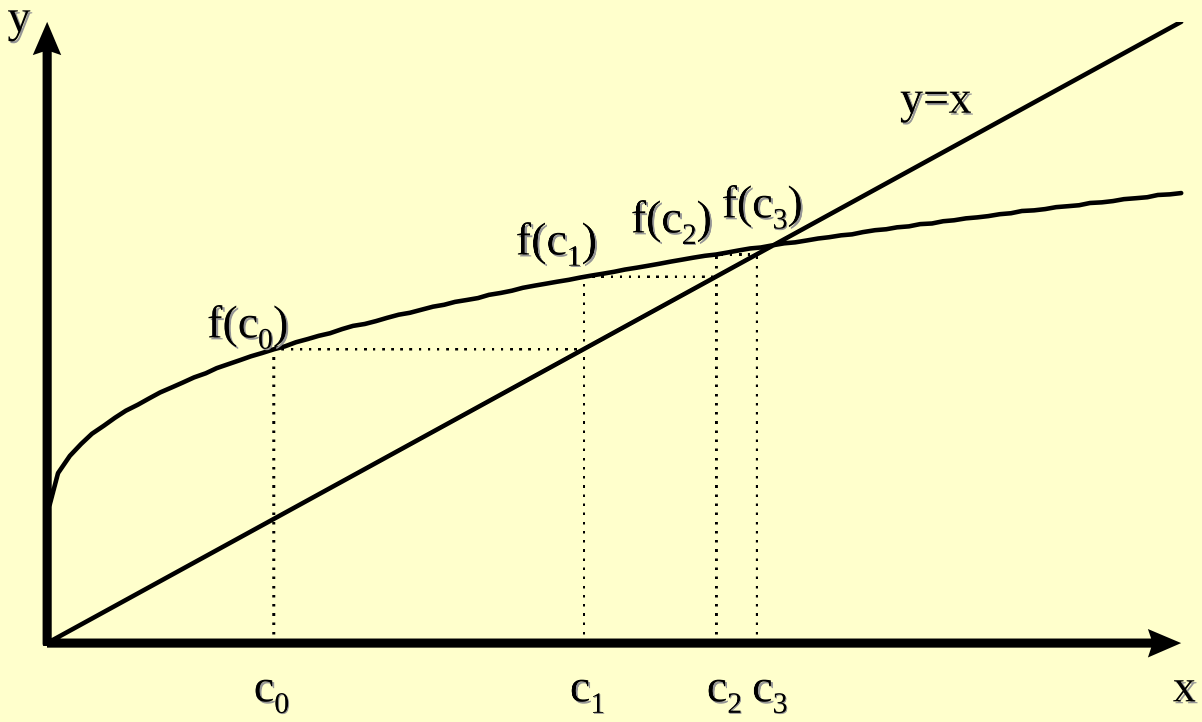
$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

$$\left| \frac{\varepsilon^{(n)}}{\left(\varepsilon^{(n-1)}\right)^2} \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right| < 1$$

Método del punto fijo



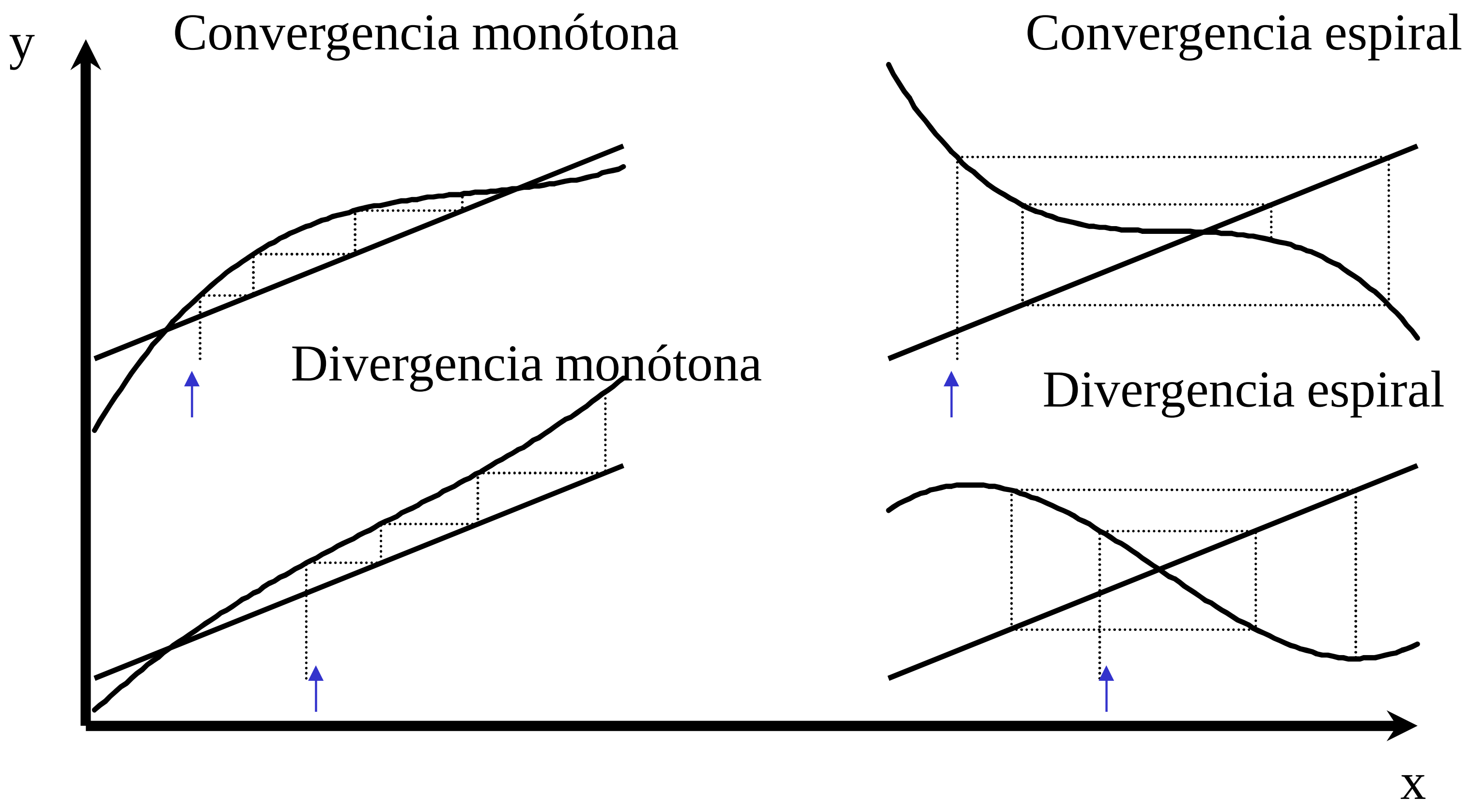
PUNTO FIJO

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

$$\left|\frac{\varepsilon^{(n+1)}}{\varepsilon^{(n)}}\right| = \left|f'(x^{(n)})\right| < 1$$

Método del punto fijo



RELAJACIÓN

- Es conveniente recordar que en numerosos casos, se puede probar la expresión:

$$x^{(n+1)} = (1-\alpha)x^{(n)} + \alpha g(x^{(n)})$$

- El valor de α es un número comprendido en el intervalo]0,1], siendo 1/2 un valor tradicional.

EJEMPLO

Resolver las raíces del siguiente polinomio por el método de Newton-Raphson:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n^2 - x_n - 3}{3x_n^2 + 6x_n - 1}$$

EJEMPLO

Paso 1 (x_0=0):

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + 3x_0^2 - x_0 - 3}{3x_0^2 + 6x_0 - 1}$$

$$x_1 = 0 - \frac{-3}{-1} = -3$$

EJEMPLO

Paso 2 (x_1=-3):

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 3x_1^2 - x_1 - 3}{3x_1^2 + 6x_1 - 1}$$

$$x_2 = -3 - \frac{(-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3}{3(-3)^2 + 6(-3) - 1} =$$

$$x_2 = -3 - \frac{0}{8} = -3$$

EJEMPLO

Resolver las raíces del siguiente polinomio por el método de Punto Fijo:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n^3 + 3x_n^2 - 3$$

$$x_0 = -3$$

$$x_1 = x_0^3 + 3x_0^2 - 3 = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 3 =$$

$$x_1 = -3$$

MÉTODOS DE SEGUNDO ORDEN

- Existen métodos que aceleran la convergencia del método de Newton-Raphson.
- Uno de los más sencillos es el método de Steffensen que toma en cuenta la derivada de segundo orden en el desarrollo en serie de Taylor.

MÉTODOS DE SEGUNDO ORDEN

- La expresión que se utiliza es:

$$0 = f(x^{(n+1)}) = f(x^{(n)}) + (x^{(n+1)} - x^{(n)}) f'(x^{(n)}) + \frac{(x^{(n+1)} - x^{(n)})^2}{2} f''(x^{(n)})$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) + \frac{\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right)}{2} f''(x^{(n)})}$$

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

- Este tipo de fórmula permite obtener una mayor precisión en un solo cálculo.
- Requiere de la evaluación de un número superior de veces de la función y sus derivadas y por lo tanto requiere mayor tiempo de cálculo.

DESVENTAJAS

- Esta forma implícita requiere un cálculo iterativo del valor $x^{(n+1)}$, lo que es poco conveniente si se desea limitar el número de cálculos en cada paso.

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) + \frac{\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right)}{2} f''(x^{(n)})}$$

FÓRMULA DE HALLEY

- Se conoce también la fórmula de Halley para la evaluación de la solución a partir de del conocimiento de la derivada de segundo orden.
- La expresión es:

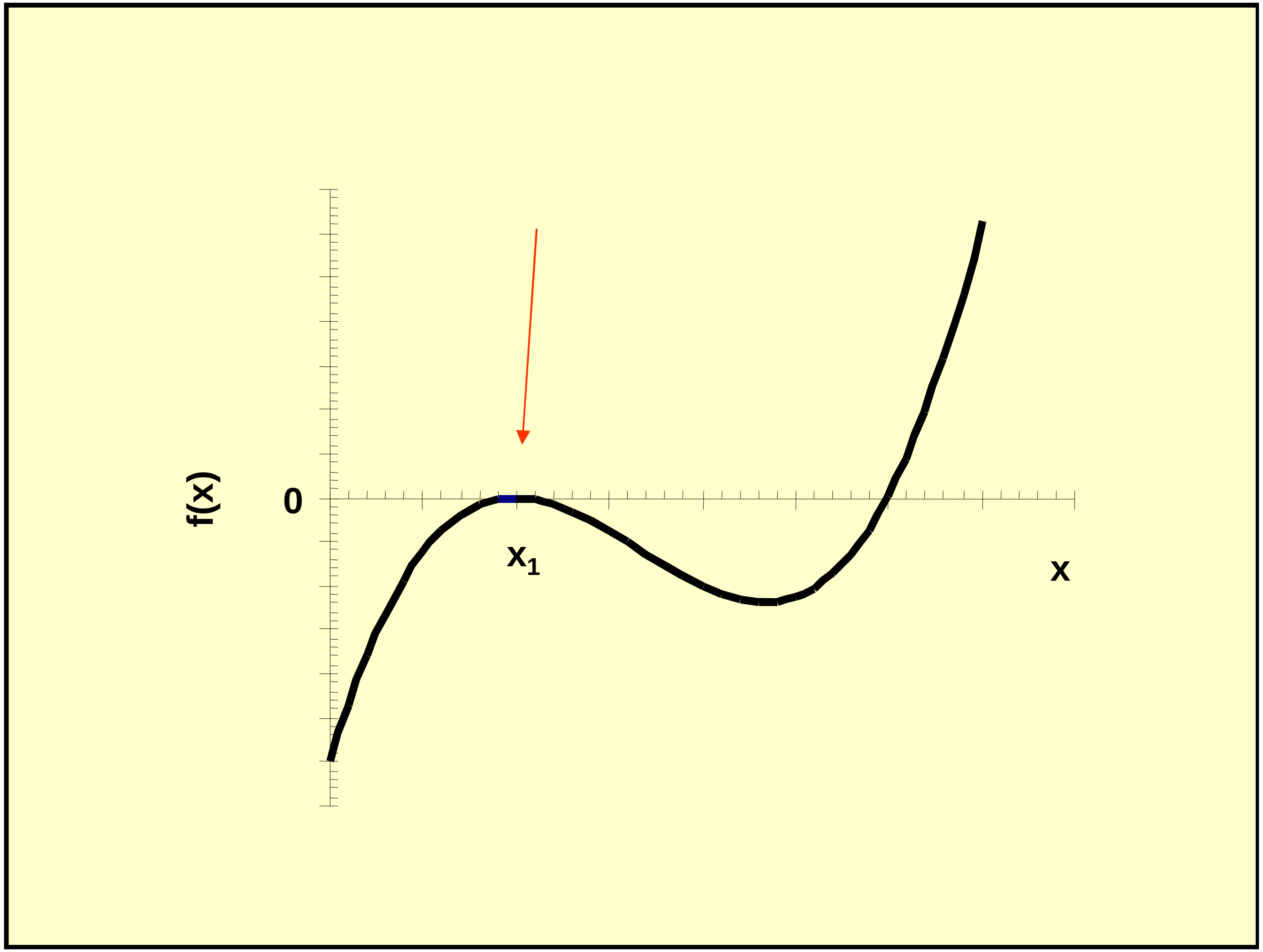
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) - \dfrac{f(x^{(n)})f''(x^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}}$$

RAÍCES MÚLTIPLES

- Una raíz de una función f(x) es múltiple cuando la función es tangencial al eje x.
- Por ejemplo, una raíz doble resulta de:

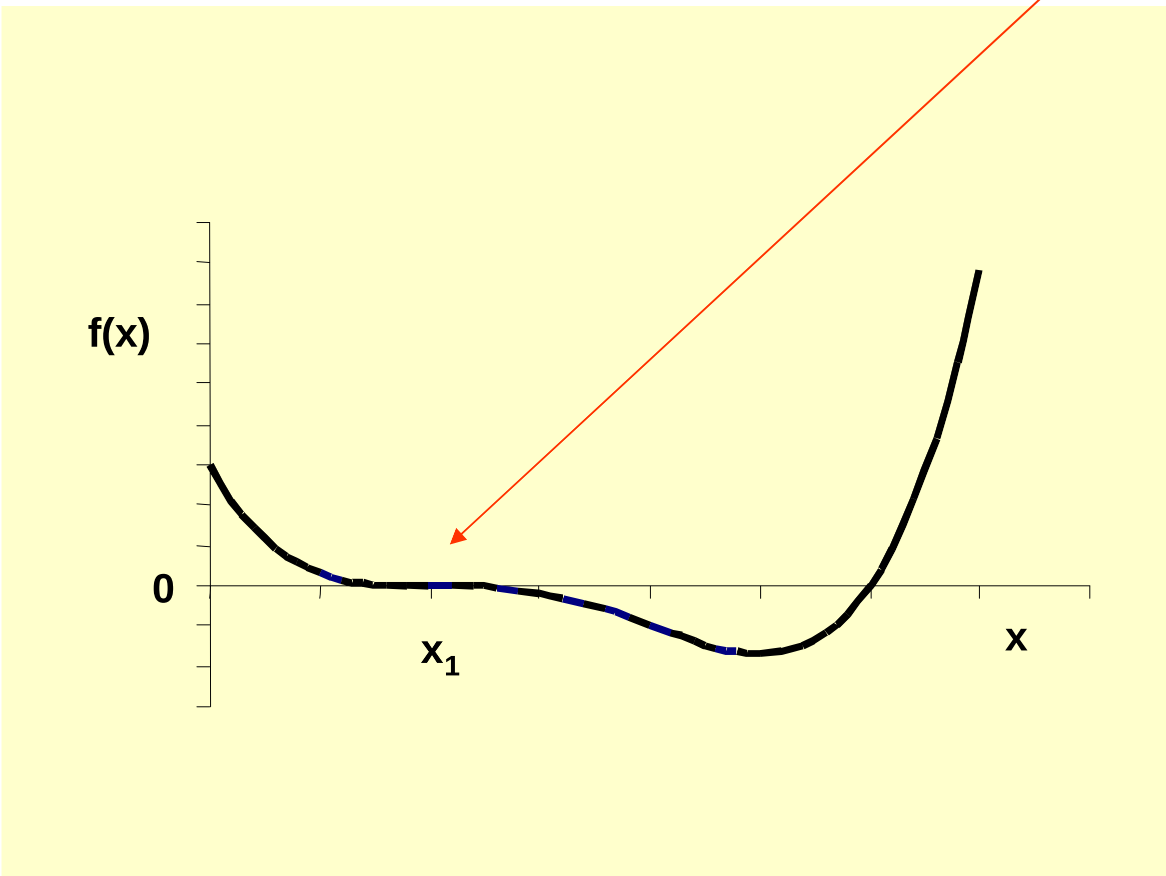
$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)^2 = x^3 - x^2\left(2x_1 + x_0\right) + x\left(x_1^2 + 2x_0x_1\right) - x_0x_1^2$$

RAICES DOBLES



RAÍCES TRIPLES

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)^3$$



PROBLEMAS

- Las funciones que presenten raíces múltiples pueden resultar muy problemáticas al querer hallar sus raíces por los métodos convencionales.
- Por ejemplo la raíces múltiples pares (doble, cuádruple, etc.) no presentan cambio de signos y su derivada es igual a cero.

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Propusieron la siguiente modificación a la fórmula de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- donde m es la multiplicidad de la raíz (esto es que m=2 para una raíz doble, m=3 para una raíz triple, etc.).

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Claro que no es muy satisfactorio tener que conocer la multiplicidad de una raíz previamente; por eso es que los mismos autores proponen una nueva función u(x) como la relación de una función con su derivada; es decir:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Demostraron que la función u(x) tiene las mismas raíces que la función original, por lo que proponen la siguiente fórmula para el cálculo iterativo:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

NEWTON-RAPHSON MULTIVARIABLE

$$f_i(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$+h_1\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + h_n\frac{\partial f_i}{\partial x_n}$$

$$\mathbf{J} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} - x_1^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} - x_2^{(n)} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m^{(n+1)} - x_m^{(n)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(n)}) \\ f_2(\mathbf{x}^{(n)}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(\mathbf{x}^{(n)}) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{J}^{-1} f(\mathbf{x}^{(n)})}$$

SISTEMA 2X2

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(n)}) \\ f_2(\mathbf{x}^{(n)}) \end{pmatrix}$$

SISTEMA 2X2

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} - \dfrac{f_1(x^{(n)})\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2(x^{(n)})\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}}{|\mathbf{J}|} \\[2ex] x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} - \dfrac{f_2(x^{(n)})\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1(x^{(n)})\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{|\mathbf{J}|} \end{cases}$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

PUNTO FIJO MULTIVARIABLE
Jacobi

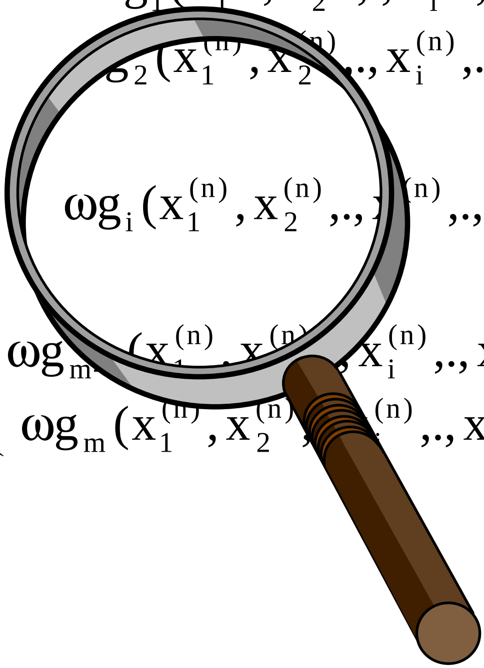
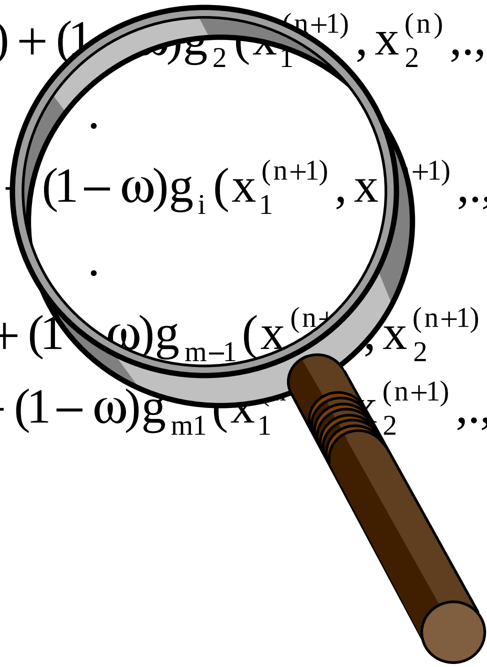
$$\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ \cdot \\ x_i^{(n+1)} \\ \cdot \\ x_{m-1}^{(n+1)} \\ x_m^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\ g_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\ \cdot \\ g_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\ \cdot \\ g_{m-1}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\ g_{m1}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \end{pmatrix}$$

PUNTO FIJO MULTIVARIABLE
Gauss-Seidel

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ \cdot \\ x_i^{(n+1)} \\ \cdot \\ x_{m-1}^{(n+1)} \\ x_m^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\ g_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\ \cdot \\ g_i(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\ \cdot \\ g_{m-1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n+1)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\ g_{m1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n+1)}, .., x_{m-1}^{(n+1)}, x_m^{(n)}) \end{pmatrix}$$

PUNTO FIJO MULTIVARIABLE
Relajación

$$
\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ . \\ x_i^{(n+1)} \\ . \\ x_{m-1}^{(n+1)} \\ x_m^{(n+1)} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\omega g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},.., x_i^{(n)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},.., x_i^{(n)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
\omega g_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},.., x_i^{(n)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)},.., x_i^{(n)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
. \\
\omega g_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},.., x_i^{(n)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_i(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)},.., x_i^{(n)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
. \\
\omega g_{m-1}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},.., x_i^{(n)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_{m-1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)},.., x_i^{(n+1)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
\omega g_m(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},.., x_i^{(n)},.., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_{m1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)},.., x_i^{(n+1)},.., x_{m-1}^{(n+1)}, x_m^{(n)})
\end{pmatrix}
$$

POLINOMIOS
Segundo grado

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

POLINOMIOS
Tercer grado - Cardano

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$$

$$b_0 = \frac{a_0}{a_3} - \frac{a_2}{3a_3}\left(\frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2}\right) = c_0 + c_2\left(3c_1 - 2c_2^2\right)$$

$$b_1 = \frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2} = c_1 - c_2^2$$

$$c_0 = \frac{a_0}{a_3}; \qquad c_1 = \frac{a_1}{3a_3}; \qquad c_2 = \frac{-a_2}{3a_3}$$

DISCRIMINANTE (H)

$$H = b_0^2 + 4b_1^3$$

Si H≥0, existen dos raíces complejas conjugadas y una raíz real.

$$E = \sqrt[3]{\frac{-b_0 + \sqrt{H}}{2}} \qquad F = \sqrt[3]{\frac{-b_0 - \sqrt{H}}{2}}$$

$$y_1 = E + F \qquad y_{2;3} = -\frac{E+F}{2} \pm i\sqrt{3}(E - F)$$

Si H=0, existen tres raíces reales, una siendo raíz doble.

$$y_1 = E + F \qquad\qquad y_{2;3} = -\frac{E+F}{2}$$

Si H<0, existen tres raíces reales:

$$y_1 = -2\sqrt{-b_1}\cos(\theta) \qquad\qquad y_2 = -2\sqrt{-b_1}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$y_3 = -2\sqrt{-b_1}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \qquad\qquad \theta = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{b_0}{2\sqrt{-b_1^3}}\right)$$

PARCIAL 1

- Día: 14 de febrero
- Duración: 2 horas
- Lugar: ENE-104
- Requiere: Calculadora. Hojas blancas tamaño carta.
- Tipo de examen: Libro abierto.

ESTRUCTURA DEL EXAMEN

- Dos partes: Teórica y práctica.
- Teórica: Selección sencilla. Cuatro preguntas incorrectas anulan una correcta. Entre 20 y 30 preguntas.
- Práctica: Tres problemas que pueden ser de: desarrollo, demostración, resolver un sistema sencillo o plantear un problema complejo.